



# Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets

Sébastien Destercke, Didier Dubois, Eric Chojnacki

► **To cite this version:**

Sébastien Destercke, Didier Dubois, Eric Chojnacki. Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, 2007, Nimes, France. pp.259-266. irsn-00196483

**HAL Id: irsn-00196483**

**<https://hal-irsn.archives-ouvertes.fr/irsn-00196483>**

Submitted on 12 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une méthode de fusion possibiliste basée sur les sous-ensembles maximaux cohérents

## Possibilistic information fusion using maximal coherent subsets

Sebastien Destercke<sup>1,2</sup>

Didier Dubois<sup>1</sup>

Eric Chojnacki<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut de Recherche en Informatique de Toulouse

<sup>2</sup> Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire, DPAM, SEMIC, LIMSI

Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex 9, France. [desterck,dubois@irit.fr](mailto:desterck,dubois@irit.fr)  
CE Cadarache, 13115 Saint Paul Lez Durance Cedex, France. [sebastien.destercke,eric.chojnacki@irsn.fr](mailto:sebastien.destercke,eric.chojnacki@irsn.fr)

### Résumé :

Lorsque plusieurs sources fournissent de l'information à propos d'une même quantité mal connue, en faire une synthèse cohérente et interprétable est souvent un problème difficile, surtout en présence de conflit entre les sources. Dans cet article, nous proposons et étudions une méthode de fusion basée sur la théorie des possibilités et sur la notion de sous-ensembles maximaux cohérents, une notion souvent utilisée dans le raisonnement logique. Cette méthode, dont le résultat final est une fonction de croyance floue, est ensuite utilisée aussi bien pour extraire de l'information utile sur les sources que pour construire une distribution synthétique finale.

### Mots-clés :

fusion, théorie des possibilités, fonctions de croyance floues, sous-ensembles maximaux cohérents

### Abstract:

When multiple sources provide information about the same badly known quantity, aggregating them into a coherent and interpretable synthesis is often a tedious problem, especially when some conflict is present. In this paper, we propose and explore a fusion method using the notion of maximal coherent subsets (often used in logic) on quantitative possibility distributions. This method's result, a fuzzy belief structure, is then used to extract useful information about sources or to build a final synthetic possibility distribution.

### Keywords:

fusion, possibility theory, fuzzy belief structures, maximal coherent subsets

## 1 Introduction

Lorsque plusieurs sources fournissent des informations entourées d'incertitude à propos d'une quantité mal connue, fusionner ces informations n'est en général pas un problème facile, en particulier en présence de conflit. Dans cet article, nous supposons que chaque source ex-

prime son incertitude sous forme d'une distribution de possibilité. La littérature existante propose déjà de nombreuses règles de fusion possibilistes, certaines exploitant des données externes (e.g. mesures de fiabilités des sources) ou encore des combinaisons entre conjonction et disjonction (voir [7]). La plupart de ces propositions consistent à construire une distribution finale à partir de l'ensemble des distributions d'origine. Ce n'est pas le cas dans cet article, où nous proposons et étudions une méthode basée sur les sous-ensembles maximaux cohérents (une approche intuitivement séduisante, inspirée des méthodes de traitement de l'inconsistance en logique [10]), et dont le résultat est, en général, une structure de croyance floue.

La section 2 rappelle quelques notions préliminaires, après quoi la section 3 détaille la méthode et la structure de croyance floue obtenue en appliquant cette dernière. La section 4 propose ensuite divers moyens pour extraire de l'information de cette structure. Finalement, la section 5 traite du problème d'obtenir une distribution de possibilité finale.

## 2 Notions préliminaires

### 2.1 Théorie des possibilités

Une distribution de possibilité  $\pi(x)$  est une fonction d'un espace  $X$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  et est formellement équivalente à l'ensemble flou  $\mu$  t.q.  $\mu(x) = \pi(x)$ . Cette distribution peut s'interpréter comme un ensemble d'intervalles de confiance emboîtés [4]. A partir de cette distribution, les mesures de possibilité et de nécessité sont définies comme suit :

$$\Pi(A) = \sup_{x \in A} \pi(x); \quad N(A) = 1 - \Pi(A^c)$$

où l'ensemble  $A^c$  est le complément de l'ensemble  $A$ . Le degré de possibilité  $\Pi(A)$  mesure la plausibilité de l'événement  $A$ , tandis que le degré de nécessité mesure la certitude de l'événement  $A$ . Une  $\alpha$ -coupe  $E^\alpha$  de la distribution  $\pi$  est définie comme l'ensemble

$$E^\alpha = \{x | \pi(x) \geq \alpha\}$$

Le noyau  $c(\pi)$  et le support  $s(\pi)$  de  $\pi$  correspondent respectivement à  $E^1$  et à  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E^\epsilon$

### 2.2 Structures de croyance floues

Une fonction de croyance est une fonction  $m$  des sous-ensembles d'un espace  $X$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  t.q.  $\sum_{E \subseteq X} m(E) = 1, m(E) \geq 0$  et  $m(\emptyset) = 0$ . Les ensembles  $E$  ayant une masse positive sont appelés ensembles focaux. A partir de cette fonction, deux fonctions d'ensembles, les mesures de plausibilité et de crédibilité, sont définies comme [11] :

$$Bel(A) = \sum_{E, E \subseteq A} m(E); \quad Pl(A) = \sum_{E, E \cap A} m(E)$$

où la fonction de crédibilité mesure la quantité d'information qui étaye forcément  $A$ , et la fonction de plausibilité la quantité d'information qui pourrait étayer  $A$ . Quand les éléments focaux sont emboîtés, une structure de croyance est équivalente à une distribution de possibilité, et la fonction de crédibilité (plausibilité)

est équivalente à une mesure de nécessité (possibilité). Dans ce modèle, la masse  $m(E)$  s'interprète comme la probabilité de savoir uniquement que la vraie valeur se trouve dans  $E$ .

Zadeh [15] a été le premier à considérer une extension des structures de croyance consistant à rendre les éléments focaux flous. Ici, ces ensembles flous seront notés  $F_i$ . Depuis, de nombreuses propositions ont été faites pour étendre les fonctions de plausibilité et de crédibilité au cas des ensembles focaux flous (voir, par exemple [13, 3]). Dans cet article, nous retiendrons la proposition de Yen [14] qui, dans le cas discret, est la suivante :

$$Pl_m(A) = \sum_{i=1}^n m(F_i) \sum_{\alpha_j} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \max_{w \in F_i^{\alpha_j}} \mu_A(w) \quad (1)$$

$$Bel_m(A) = \sum_{i=1}^n m(F_i) \sum_{\alpha_j} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \min_{w \in F_i^{\alpha_j}} \mu_A(w) \quad (2)$$

avec  $0 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_j < \dots \leq 1$  et où  $F_i^{\alpha_j}$  est l' $\alpha_j$ -coupe de l'élément focal flou  $F_i$ . Le choix de cette généralisation (plutôt qu'une autre) vient du fait que la partie des équations (1) et (2) impliquant les ensembles  $F_i$  est équivalente au calcul de l'intégrale de Choquet [2] de l'événement (flou)  $A$  sur la distribution de possibilité  $\pi_i = \mu_{F_i}$ . Des opérateurs linéaires sont donc utilisés dans l'ensemble des équations, ce qui nous semble plus cohérent qu'un mélange entre opérateurs linéaires et opérateurs basés sur le maximum/minimum. Notons également que la proposition de Yen est une généralisation de celle de Smets [12]. Même si le travail de Yen n'est pas basé sur ces considérations, mais plutôt sur des problèmes d'optimisation, il est intéressant de souligner que cette généralisation a de fortes justifications théoriques. En fait, cette généralisation revient à considérer un ensemble aléatoire flou comme un ensemble aléatoire où chaque coupe  $F_i^{\alpha_j}$  a une masse  $m(F_i)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$  [1].

### 2.3 Exposition et illustration du problème

Dans cet article, nous considérons un ensemble de  $n$  sources, fournissant chacune une distribution de possibilité  $\pi_i$  en tant qu'évaluation de

la quantité mal connue  $x \in X$ . Nous utilisons les sous-ensembles maximaux cohérents pour résumer cette information et travaillons ensuite sur la structure obtenue.

Pour illustrer notre propos, nous considérons l'exemple suivant : quatre sources (experts, senseurs, ...) fournissent des informations en terme d'un intervalle conservatif et d'un intervalle optimiste, tandis que les distributions de possibilités sont supposées trapézoïdales. L'information de l'exemple, représentée sur la figure 1, est résumée dans le tableau 1.

Tableau 1 – Information des sources

Source	1	2	3	4
Int. cons.	[1,5]	[1,13]	[3,11]	[5,13]
Int. opt.	[2,4]	[3,6]	[7]	[10,12]

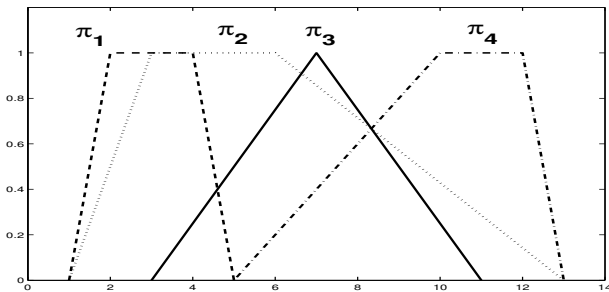


Figure 1 – Exemple : illustration

### 3 Présentation de la méthode

Lorsqu'aucune information concernant la fiabilité des sources n'est disponible, et lorsque les sources sont en conflit, l'information délivrée par ces dernières devrait être fusionnée par une méthode prenant chaque source en compte (i.e. sans en éliminer aucune), tout en essayant de gagner un maximum d'informativité. Utiliser la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents répond naturellement à cette double préoccupation. Elle consiste à appliquer un opérateur conjonctif au sein de sous-ensembles de sources cohérentes entre-elles, pour ensuite utiliser un opérateur disjonctif sur ces der-

niers sous-ensembles [10]. Cela permet de gagner un maximum d'information tout en restant cohérent avec l'information transmise par l'ensemble des sources. Nous expliquons maintenant en détail comment nous proposons d'appliquer cette approche à des distributions de possibilités définies sur les réels.

#### 3.1 Sous-ensembles maximaux cohérents sur des intervalles

Considérons un ensemble  $N = \{1, \dots, n\}$  de  $n$  intervalles  $I_i = [a_i, b_i]$ . Utiliser la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents sur ces intervalles revient à prendre l'intersection au sein des ensembles  $K_j \subset N$  t.q.  $\bigcap_{i \in K_j} I_i \neq \emptyset$  et ensuite à faire l'union des résultats (i.e.  $\bigcup_j \bigcap_{i \in K_j} I_i$ ). L'algorithme 1, qui permet de trouver les ensembles  $K_j$ , a été donné par Dubois et al. dans [5]. Contrairement au cas de la logique classique (où la recherche exhaustive de sous-ensembles maximaux cohérents est de complexité exponentielle), l'algorithme 1 est linéaire, et donc efficace numériquement.

---

#### Algorithme 1 : Sous-ensembles maximaux cohérents sur des intervalles

---

**Input :**  $n$  intervalles

**Output :** Liste de  $m$  sous-ensembles maximaux cohérents  $K_j$

Liste =  $\emptyset$ ;  $j=1$ ;  $K = \emptyset$ ;

Ordonner de manière croissante

$\{a_i, i = 1, \dots, n\} \cup \{b_i, i = 1, \dots, n\}$ ;

Les renommer  $\{c_i, i = 1, \dots, 2n\}$  avec

$type(i) = a$  si  $c_i = a_k$  et  $type(i) = b$  si  $c_i = b_k$ ;

**for**  $i = 1, \dots, 2n - 1$  **do**

**if**  $type(i) = a$  **then**

        Ajouter source  $k$  à  $K$  t.q.  $c_i = a_k$ ;

**if**  $type(i + 1) = b$  **then**

            Ajouter  $K$  à Liste ( $K_j = K$ );

$j = j + 1$ ;

**else**

        Enlever source  $k$  de  $K$  t.q.  $c_i = b_k$ ;

L'algorithme se base sur l'ordonnement des points extrêmes des intervalles en une séquence  $(c_i)_{i=1, \dots, 2n}$  et sur le fait que chaque fois (et

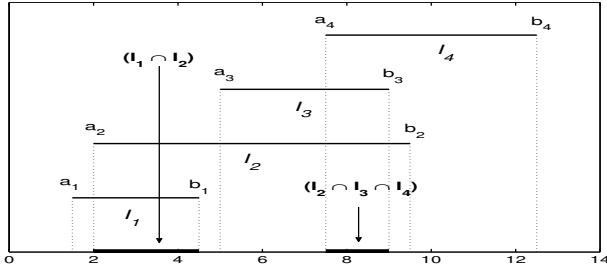


Figure 2 – Sous-ensembles maximaux cohérents sur des intervalles

seulement alors) qu'un  $c_i$  de type  $b$  (i.e. la fin d'un intervalle) est suivi par un  $c_{i+1}$  de type  $a$  (i.e. le début d'un intervalle), une intersection maximale cohérente d'intervalles est atteinte. La figure 2 montre la situation pour les  $\alpha$ -coupes de niveau 0.5 de l'exemple. L'algorithme 1 trouve deux sous-ensembles maximaux cohérents :  $K_1 = \{I_1, I_2\}$  et  $K_2 = \{I_2, I_3, I_4\}$ . Après application de la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents, le résultat est  $(I_1 \cap I_2) \cup (I_2 \cap I_3 \cap I_4) = [2, 4.5] \cup [7.5, 9]$  (en gras sur la figure).

### 3.2 Construire la structure de croyance floue

Revenons aux  $n$  sources et aux distributions  $\pi_i$  que nous supposons équivalentes à des intervalles flous. A chaque niveau  $\alpha$ , les  $\alpha$ -coupes des distributions forment un ensemble de  $n$  intervalles  $E_i^\alpha$ . Il est ensuite possible d'appliquer l'algorithme 1 à chacun de ces ensembles d'intervalles : soit  $K_j^\alpha$  les sous-ensembles d'intervalles t.q.  $\bigcap_{i \in K_j^\alpha} E_i^\alpha \neq \emptyset$ . Nous calculons ensuite  $E^\alpha$ , l'union des intersections de sous-ensembles  $K_j^\alpha$  comme proposé dans [6] :

$$E^\alpha = \bigcup_{j=1, \dots, n(\alpha)} \bigcap_{i \in K_j^\alpha} E_i^\alpha \quad (3)$$

où  $n(\alpha)$  est le nombre de sous-ensembles  $K_j^\alpha$  d'intervalles maximaux cohérents pour un niveau  $\alpha$  donné. En général,  $E^\alpha$  est une union d'intervalles disjoints, et nous n'avons pas  $E^\alpha \supset E^\beta \quad \forall \beta > \alpha$  (i.e. le résultat n'est pas une distribution de possibilité, puisque les  $\alpha$ -coupes ne sont pas emboîtées). En pratique,

pour des ensembles flous, il y aura un ensemble fini de valeurs  $0 = \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{k^*} \leq \beta_{k^*+1} = 1$  t.q. les ensembles  $E^\alpha$  seront emboîtés pour  $\alpha \in (\beta_k, \beta_{k+1}]$ . L'algorithme 2 offre un moyen simple de calculer les valeurs  $\beta_k$ . Il calcule simplement les hauteurs des distributions  $\min(\pi_i, \pi_j)$  pour toutes les paires de distributions  $\pi_i, \pi_j$ . Clairement, cette valeur est équivalente à celle de l' $\alpha$ -coupe après laquelle  $\pi_i$  et  $\pi_j$  n'appartiennent plus au même sous-ensemble maximal cohérent.

---

**Algorithme 2** : Valeurs  $\beta_k$  de la structure de croyance floue

---

**Input** :  $n$  distributions de possibilité  $\pi_i$

**Output** : Liste de valeurs  $\beta_k$

Liste =  $\emptyset$ ;  $i=1$  ;

**for**  $k = 1, \dots, n$  **do**

**for**  $l = k + 1, \dots, n$  **do**

$\beta_i = \max(\min(\pi_k, \pi_l))$  ;

$i=i+1$  ;

    Ajouter  $\beta_i$  à Liste;

Ordonnancer Liste par ordre croissant ;

---

Si nous appliquons l'équation (3) pour  $\alpha \in (\beta_k, \beta_{k+1}]$ , nous obtenons un ensemble flous  $F_k$  non normalisé dont le degré d'appartenance varie dans  $(\beta_k, \beta_{k+1}]$  (puisque les ensembles  $E^\alpha$  sont emboîtés entre ces valeurs). Cet ensemble peut être normalisé (pour avoir  $[0, 1]$  comme plage de variation) en changeant  $\mu_{F_k}(x)$  en

$$\frac{\max(\mu_{F_k}(x) - \beta_k, 0)}{\beta_{k+1} - \beta_k}$$

et en assignant le poids  $m_i = \beta_{k+1} - \beta_k$  à cet ensemble flou. Par abus de notation, nous noterons  $F_k$  cet ensemble normalisé dans la suite. Globalement, ces opérations reviennent à construire une structure de croyance floue  $(\mathcal{F}, m)$  avec des poids  $m_i$  et des ensembles flous (normalisés) associés  $F_k$ . Les poids  $m_i$  peuvent s'interpréter comme la quantité de confiance donnée à la représentation  $F_k$  par l'ensemble des sources. La figure 3 donne une illustration du résultat (avant normalisation) sur l'exemple. Si nous prenons l' $\alpha$ -coupe 0.5, nous

retrouvons le résultat de la figure 2. La structure de croyance floue obtenue est donc une "fuzzification" cohérente de la méthode utilisée sur les intervalles classiques. Notons que si toutes les sources s'accordent sur au moins une valeur commune, le résultat est un ensemble flou unique  $\pi(x) = \min_{i=1,\dots,n} \pi_i(x)$  (conjonction usuelle). Au contraire, si chaque paire de source est en situation de conflit total (i.e.  $\sup_{x \in X} \min(\pi_i, \pi_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ ), alors le résultat est un ensemble flou unique  $\pi(x) = \max_{i=1,\dots,n} \pi_i(x)$  (disjonction usuelle).

Une autre option serait de considérer chaque distribution  $\pi_i$  comme une fonction de croyance floue à un seul élément focal, et d'appliquer la règle des sous-ensembles maximaux cohérents à ces éléments focaux, ce qui reviendrait à calculer

$$\pi_{\cap}(x) = \max_{j=1,\dots,n(0)} \min_{i \in K_j^0} \pi_i(x)$$

c'est-à-dire la disjonction des conjonctions des sous-ensembles de distributions dont la conjonction est non-nulle. Néanmoins, nous considérons cette option comme peu intéressante par rapport à la méthode décrite ici, vu que  $\pi_{\cap}$  peut être retrouvée à partir de  $(\mathcal{F}, m)$ , alors que l'inverse n'est pas vrai (par conséquent,  $(\mathcal{F}, m)$  est plus riche en information que  $\pi_{\cap}$ ). De plus, on peut s'attendre à ce que le résultat  $\pi_{\cap}$  soit moins robuste aux changements que  $(\mathcal{F}, m)$ .

Une fois la structure de croyance floue  $(\mathcal{F}, m)$  calculée, nous pouvons l'interpréter comme une bonne représentation de l'ensemble de l'information fournie les sources. Néanmoins, il peut être difficile de tirer des conclusions ou des informations utiles directement de la structure (voir la figure 3 pour en être convaincu). Dans les sections suivantes, nous présentons des indices qui peuvent être utiles à l'analyste.

## 4 Extraction d'information

Dans cette section, nous présentons des indices ainsi que des informations qui peuvent aider

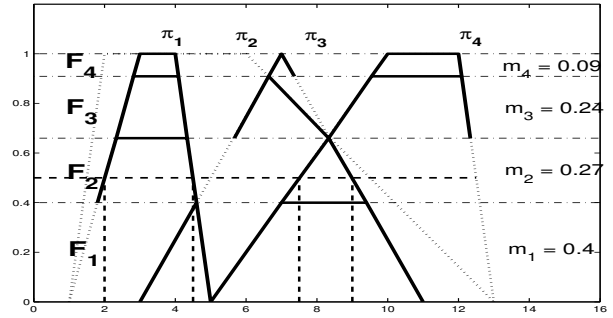


Figure 3 – Résultat de la méthode sur l'exemple (—) et  $\alpha$ -coupe 0.5 (---)

dans l'analyse des résultats précédents.

### 4.1 Mesurer le gain de précision

Le premier indice proposé mesure la précision gagnée par l'application de la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents à l'ensemble des  $n$  distributions de possibilité fournies par les sources. Soit  $\pi_{\cup}$  la disjonction t.q.  $\pi_{\cup} = \max_{i=1,\dots,n} \pi_i$ . Nous considérons ensuite que l'information brute  $IP$  fournie par l'ensemble des sources peut se mesurer comme

$$IP = |\pi_{\cup}| = \int_X \pi_{\cup}(x) dx$$

avec  $|\pi_{\cup}|$  la cardinalité floue de  $\pi_{\cup}$ , qui généralise la notion de cardinalité d'un intervalle (la cardinalité étant un candidat naturel pour mesurer l'imprécision). Une fois la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents appliquée, l'imprécision  $IP'$  de la structure de croyance floue  $Bel_i$  peut se mesurer comme

$$IP' = \sum m_k |F_k|$$

$(IP - IP')/IP$  est donc un indice normalisé qui permet de mesurer le gain de précision engendré par l'application de la méthode. Cet indice vaut 0 en cas de conflit total et converge vers 1 quand les sources tendent à toutes être d'accord sur une même valeur (i.e.  $\exists! x$  s.t.  $\pi_i(x) = 1 \quad \forall i$ ). Dans notre exemple, nous avons  $IP = 11.195$ ,  $IP' = 5.412$  et l'indice normalisé vaut 0.52, ce qui indique un gain

raisonnable de précision. Notons que  $IP'/IP$  peut également s'interpréter comme une mesure du conflit globale entre les sources, puisqu'il est maximum en cas de conflit total et minimum en cas d'accord total sur une seule valeur.

#### 4.2 Confiance du groupe en un événement, en une source

Puisque nous pouvons considérer que la structure de croyance floue  $(\mathcal{F}, m)$  résultant de la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents est une image fidèle de l'information délivrée par l'ensemble des sources, les fonctions de plausibilité et de crédibilité d'un événement (flou)  $A$  peuvent respectivement s'interpréter comme des mesures de confiance haute et basse données à  $A$  par l'ensemble des sources. En particulier, si  $A = \pi_i$ , la plausibilité et la crédibilité peuvent s'interpréter comme la "confiance" haute et basse accordée à l'information délivrée par la source  $i$ , au regard de l'information délivrée par l'ensemble des sources.

Dans notre exemple, les valeurs  $[Bel_m(\pi_i), Pl_m(\pi_i)]$  pour les sources 2 et 4 sont, respectivement,  $[0.38, 1]$  and  $[0, 0.93]$  (en utilisant les équations (2) et (1)). Nous voyons que l'information délivrée par la source 2 est jugée totalement plausible par les autres, et est de plus fortement supportée (ce qui est dû au fait que la source 2 est la moins conflictuelle des 4). Parce qu'une des sources est en conflit total avec la source 4, sa crédibilité tombe à 0, mais l'information délivrée par cette dernière est néanmoins jugée très plausible, ce qui est dû au faible conflit avec les sources 2 et 3.

Les fonctions de crédibilité et de plausibilité sont des candidats naturels pour mesurer la confiance en une source, mais leur informativité peut parfois être jugée trop faible. Par exemple, si une distribution  $\pi_i$  donnée par une source  $i$  est en conflit total avec toutes les autres, la structure de croyance floue résultante  $(\mathcal{F}, m)$  donnera les mesures suivantes pour  $\pi_i$  :  $[Bel_m(\pi_i), Pl_m(\pi_i)] = [0, 1]$ , un résultat qui ne

peut pas être moins informatif. Une alternative est de prendre l'équivalent de la probabilité pig-nistique, qui devient

$$BetP(A) = \sum m(F_k) \frac{|F_k \cap A|}{|F_k|} \quad (4)$$

où  $|F_k \cap A|/|F_k|$  est le degré d'inclusion de  $F_k$  dans  $A$ . Dans l'exemple, l'équation (4) appliquée aux sources 2 et 4 donne respectivement les valeurs de confiance 0.80 et 0.49, confirmant ainsi qu'une plus grande confiance est accordée à la source 2.

#### 4.3 Mesurer la confusion

Nous considérons maintenant une mesure étudié dans [8], comparable à la mesure de Shannon, et pour laquelle nous sommes en mesure de donner une interprétation en terme de comportement des sources (il existe bien d'autres propositions d'extensions de la mesure de Shannon, mais dans notre cas, elles sont souvent difficile à interpréter en terme de comportement des sources). Cette mesure, appelée mesure de confusion, a pour formule

$$C(\mathcal{F}, m) = \sum_{F_k} m(F_k) Bel(F_k) \quad (5)$$

pour les structures de croyance floues. Pour les structures de croyance habituelles,  $C(\mathcal{F}, m)$  est maximum ( $= 1$ ) quand  $(\mathcal{F}, m)$  a un intervalle non-flou comme seul élément focal, et est minimum ( $= 0$ ) si les poids sont uniformément distribués parmi un nombre maximal d'éléments focaux qui forment une anti-chaîne (i.e. un ensemble de sous-ensembles tel qu'aucun des éléments de cet ensemble n'est inclus dans un autre).

Dans notre cadre, et en terme de distributions  $\pi_i$ , le maximum de  $C(\mathcal{F}, m)$  est atteint ssi chaque  $\pi_i$  est un intervalle non-flou (i.e. les sources donnent des bornes précises). Quand au minimum,  $C(\mathcal{F}, m)$  est d'autant plus petit que :

1.  $(\mathcal{F}, m)$  a un nombre élevé d'éléments focaux  $F_k$

2. les masses sont uniformément réparties entre les éléments  $F_k$
3. il y a de paires d'éléments focaux  $F_k, F_j$ ,  $j \neq i$  telle qu'il existe une valeur  $x \in c(F_j) \rightarrow x \notin s(F_k)$

avec  $c(F_k), s(F_k)$  les noyaux et supports de l'élément focal  $F_k$ . La dernière contrainte assure que l'intégrale de Choquet vaudra 0 dans l'équation (2), excepté pour  $F_k = F_j$ , ce qui implique que  $Bel(F_k)$  sera minimal. Cet indice mesure bien la confusion entre les sources, puisqu'il augmente lorsque les informations des sources se fuzzifient et lorsque les niveaux de conflits sont uniformément répartis entre les paires de sources.

Soit  $n$  sources fournissant des ensembles flous trapézoïdaux : le nombre maximal d'ensembles focaux résultant de la méthode est  $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ . De plus, nous avons  $Bel(F_k) \geq 0.5m(F_k)$ , à cause du caractère flou des  $F_k$ . Cela nous donne  $\inf(C(\mathcal{F}, m)) = 0.5(\frac{n(n-1)}{2} + 1)^{-2}$ , une valeur qui peut rapidement approcher 0, même pour un petit nombre de sources (0.03 pour 3 sources et 0.004 pour 5 sources). Dans notre exemple,  $C(\mathcal{F}, m) = 0.164$ , suggérant une situation assez confuse. Ce résultat indique que l'information est très dispersée, et donc que certaines sources fournissent peut-être des informations relatives à différentes situations (des experts ayant mal compris la question, ...). Notons que cette mesure de confusion est différente de l'indice global de conflit introduit au-dessus. Si toutes les sources fournissent des intervalles disjoints, l'indice de confusion sera minimal, quand l'indice de conflit global sera maximal.

## 5 Construire une distribution finale

Nous l'avons vu dans les sections précédentes, la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents permet d'extraire de l'information utile sur les sources et sur leurs opinions concernant une quantité mal connue. Néanmoins, il peut être difficile d'utiliser directement la structure de croyance floue dans certains problèmes. Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir une

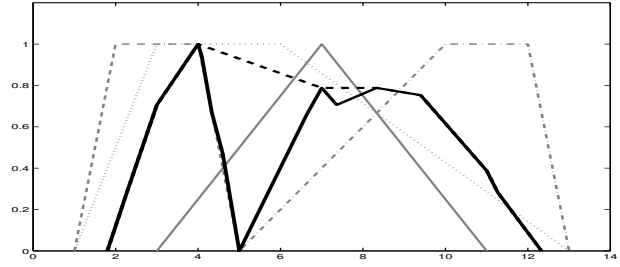


Figure 4 – Fonction de contour normalisée (—) et convexifiée (---), avec distributions d'origine

méthode qui permettent de construire une distribution unique à partir de la structure de croyance floue  $(\mathcal{F}, m)$ . Une option naturelle est de construire la fonction de contour de la structure de croyance floue, c'est-à-dire  $\pi_c(x) = Pl(x)$ ,  $\forall x$ , ce qui revient à calculer la moyenne arithmétique des fonctions d'appartenance des ensembles flous  $F_k$  (normalisés), le poids de  $F_k$  étant égal à  $m_k$ . Il est ensuite possible de normaliser  $\pi_c$  et/ou de prendre son enveloppe convexe au besoin.

La figure 4 montre la fonction de contours normalisée et convexifiée de notre exemple, avec les distributions d'origine en fond. Le résultat final est une distribution bimodale, avec un mode centré autour de la valeur 8 et l'autre ayant pour valeur 4, cette dernière étant la plus plausible. Ces deux zones sont en effet les seules à être considérées comme plausibles par trois sources conjointes. On peut donc s'attendre à ce que la vraie valeur se trouve dans une de ces deux zones, mais il est difficile de se prononcer sur l'une ou l'autre. Dans ce cas, il est plus prudent de prendre l'enveloppe convexe de  $\pi_c$  comme représentation finale, ou bien d'essayer de trouver les causes des conflits.

## 6 Conclusions

Nous avons décrit une méthode utilisant la notion de sous-ensembles maximaux cohérents dans le cas où plusieurs sources expriment leurs incertitudes en terme de distributions de possibilité. Cette méthode est simple (elle ne requiert que l'information fournie par les sources) et in-



tuitivement séduisante.

Nous avons proposé différents moyens d'obtenir des informations à partir du résultat de la méthode. Nous nous sommes concentrés sur les moyens de caractériser la situation par rapport aux sources d'information. Ce type d'information peut être utile pour savoir où les prochains efforts devront se concentrer (pour trouver les causes du conflit, ou pourquoi des sources ont fourni des informations semblables, ...). Nous avons aussi proposé un moyen de construire une distribution finale cohérente à partir de l'information disponible, en utilisant la structure de croyance floue obtenue par notre méthode. Cela permet au décideur de construire une distribution synthétique, facile à interpréter et à manipuler, qui représente bien l'ensemble des informations délivrées par les sources.

Comme mentionné plus haut, la méthode des sous-ensembles maximaux cohérents ne fait aucune supposition quand aux sources d'information, et est applicable aussi bien sur un espace symbolique que sur un espace métrique. Néanmoins, il existe des situations où de telles informations sont disponibles et devraient être prises en compte. La poursuite de ce travail consistera donc à intégrer de manière cohérente ces informations dans la méthode de fusion, tout en conservant l'idée d'utiliser les sous-ensembles maximaux cohérents. Il est également nécessaire de comparer les résultats de cette méthode avec d'autres méthodes de fusion (voir, par exemple [9])

## Références

- [1] C. Baudrit, D. Guyonnet, and D. Dubois. Joint propagation and exploitation of probabilistic and possibilistic information in risk assessment. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, 14 :593–608, 2006.
- [2] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'institut Fourier*, 5 :131–295, 1954.
- [3] T. Denoeux. Modeling vague beliefs using fuzzy-valued belief structures. *Fuzzy Sets and Systems*, 116 :167–199, 2000.
- [4] D. Dubois, L. Foulloy, G. Mauris, and H. Prade. Probability-possibility transformations, triangular fuzzy sets, and probabilistic inequalities. *Reliable Computing*, 10 :273–297, 2004.
- [5] D. Dubois, P. Hajek, and H. Prade. Knowledge-driven versus data-driven logics. *J. of Logic, Language and Information*, 9 :65–89, 2000.
- [6] D. Dubois and H. Prade. Possibility theory in information fusion. In G. D. Riccia, H. Lenz, and R. Kruse, editors, *Data fusion and Perception*, volume CISM Courses and Lectures N 431, pages 53–76. Springer Verlag, Berlin, 2001.
- [7] D. Dubois, H. Prade, and R. Yager. *Fuzzy Sets in Approximate Reasoning and Information Systems*, chapter Merging fuzzy information, pages 335–401. The Handbooks of Fuzzy Sets Series. Kluwer, Boston, 1999.
- [8] D. Dubois and A. Ramer. Extremal properties of belief measures in the theory of evidence. *I. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 1(1) :57–68, 1993.
- [9] M. Oussalah, H. Maaref, and C. Barret. From adaptative to progressive combination of possibility distributions. *Fuzzy sets and systems*, 139 :559–582, 2003.
- [10] N. Rescher and R. Manor. On inference from inconsistent premises. *Theory and Decision*, 1 :179–219, 1970.
- [11] G. Shafer. *A mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, New Jersey, 1976.
- [12] P. Smets. The degree of belief in a fuzzy event. *Information Science*, 25 :1–19, 1981.
- [13] R. Yager. Generalized probabilities of fuzzy events from fuzzy belief structures. *Information sciences*, 28 :45–62, 1982.
- [14] J. Yen. Generalizing the dempster-shafer theory to fuzzy sets. *IEEE Trans. on Sys-*

*tems, Man and Cybernet.*, 20(3) :559–569,  
1990.

- [15] L. Zadeh. Fuzzy sets and information granularity. In R. Ragade, M. Gupta, and R. Yager, editors, *Advances in Fuzzy Sets Theory and Applications*, pages 3–18. North Holland, Amsterdam, 1979.